Rezolvarea subiectului model pentru

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ

prezentare de **ROMEO ZAMFIR**

Subiectul I

1. Avem că $|x+1|\le 24 \Leftrightarrow -24\le x+1\le 24 \Leftrightarrow -25\le x\le 23$. Deci, $A=\{-25;-24;...;-1;0;1;...;22;23\}$, de unde obţinem că mulţimea A are $25+1+23=49$ de elemente.

2. Trebuie să rezolvăm sistemul $\begin{cases} y=2\cdot x-1 \\ y=2\cdot x^2-3\cdot x+1 \end{cases}$. Obţinem ecuaţia $2\cdot x^2-3\cdot x+1=2\cdot x-1 \Leftrightarrow$ $2\cdot x^2-5\cdot x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ sau $x=\frac{1}{2}$. Deci, dreapta $y=2\cdot x-1$ intersectează parabola $y=2\cdot x^2-3\cdot x+1$ în două puncte $A(2;3)$ şi $B\left(\frac{1}{2};0\right)$.

3. Avem că $\sqrt[3]{1+7\cdot x}=1+x \Leftrightarrow 1+7\cdot x=(1+x)^3 \Leftrightarrow 1+7\cdot x=1+3\cdot x+3\cdot x^2+x^3 \Leftrightarrow x^3+3\cdot x^2-4\cdot x=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\cdot\left(x^2+3\cdot x-4\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x^2+3\cdot x-4 \Leftrightarrow x\in\{-4;0;1\}$.

4. Numărul submulţimilor lui A formate din două numere impare este egal cu $C_5^2=10$, iar numărul submulţimilor lui A formate dintr-un singur număr par este egal cu $C_5^1=5$. Conform regulii produsului, numărul de submulţimi cu 3 elemente ale mulţimii A, submulţimi care conţin exact 2 numere impare, este egal cu $C_5^2\cdot C_5^1=10\cdot 5=50$.

5. Mijlocul segmentului $[AB]$, notat cu M, are coordonatele $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)=M(2;1)$, iar panta dreptei AB este egală cu $m_{AB}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{-2-4}{1-3}=3$, de unde rezultă că panta mediatoarei segmentului AB, notată cu m, are proprietatea că $m_{AB}\cdot m=-1$. Obţinem că mediatoarea segmentului $[AB]$ este dreapta ce trece prin punctul $M(2;1)$ şi are panta $m=-\frac{1}{3}$, deci are ecuaţia $y-y_M=m\cdot(x-x_M)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y-1=-\frac{1}{3}\cdot(x-2)\Leftrightarrow x+3\cdot y-5=0$.

Altfel, acest subpunct se poate rezolva astfel: notăm cu $P(x;y)$ un punct oarecare ce aparţine mediatoarei segmentului $[AB] \Leftrightarrow d(P,A)=d(P,B)\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=$ $=(x-3)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x+1+y^2+4\cdot y+4=x^2-6\cdot x+9+y^2-8\cdot y+16 \Leftrightarrow 4\cdot x+12\cdot y-20=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x+3\cdot y-5=0$. Deci, ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$ este $x+3\cdot y-5=0$.

6. Din $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ obţinem că $\sin x>0$. Avem că $\cos 2x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 1-2\cdot\sin^2 x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \sin^2 x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2 x}=\sqrt{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow |\sin x|=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Prin urmare, $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Subiectul al II-lea

1. a) Matricea sistemului este $A=\begin{pmatrix}1 & m & m^2\\ m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & m\end{pmatrix}$. Deci,

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & m & m^2\\ m & m^2 & 1\\ m^2 & 1 & m\end{vmatrix}\overset{C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}1+m+m^2 & m & m^2\\ 1+m+m^2 & m^2 & 1\\ 1+m+m^2 & 1 & m\end{vmatrix}=\left(1+m+m^2\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & m & m^2\\ 1 & m^2 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}\overset{\substack{L_2-L_1\\ L_3-L_1}}{=}\left(1+m+m^2\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & m & m^2\\ 0 & m^2-m & 1-m^2\\ 0 & 1-m & m-m^2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(1+m+m^2\right)\cdot\begin{vmatrix}1 & m & m^2\\ 0 & m^2-m & 1-m^2\\ 0 & 1-m & m-m^2\end{vmatrix}=\left(1+m+m^2\right)\cdot\begin{vmatrix}m^2-m & 1-m^2\\ 1-m & m-m^2\end{vmatrix}=\left(1+m+m^2\right)\cdot\begin{vmatrix}m\cdot(m-1) & (1-m)\cdot(1+m)\\ 1-m & m\cdot(1-m)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(1+m+m^2\right)\cdot(1-m)^2\begin{vmatrix}-m & 1+m\\ 1 & m\end{vmatrix}=-(m-1)^2\cdot\left(m^2+m+1\right)^2=-\left[(m-1)\cdot\left(m^2+m+1\right)\right]^2=-\left(m^3-1\right)^2.$$

Prin urmare, $\det A=0\Leftrightarrow -(m-1)^2\cdot\left(m^2+m+1\right)^2=0\Leftrightarrow (m-1)^2=0$ sau $\left(m^2+m+1\right)^2=0\Leftrightarrow m-1=0$ sau $m^2+m+1=0\Leftrightarrow m=1$. Răspuns: $m=1$.

b) Presupunem prin absurd că există $m\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul admite o soluţie $(x_0;y_0;z_0)$ cu x_0,y_0,z_0 numere reale pozitive. Rezultă că $\begin{cases}x_0+m\cdot y_0+m^2\cdot z_0=0\\ m\cdot x_0+m^2\cdot y_0+z_0=0\\ m^2\cdot x_0+y_0+m\cdot z_0=0\end{cases}$. Adunând toate ecuaţiile sistemului obţinem $\left(1+m+m^2\right)\cdot(x_0+y_0+z_0)=0$, ceea ce reprezintă o contradicţie deoarece $x_0+y_0+z_0>0$ şi $1+m+m^2\geq\frac{3}{4}>0$ pentru orice $m\in\mathbb{R}$. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, deci pentru nicio valoare a lui m, sistemul nu are o soluţie $(x_0;y_0;z_0)$ cu x_0,y_0,z_0 numere reale pozitive.

Observaţie. Un număr real x poate fi pozitiv $(x>0)$, negativ $(x<0)$ sau nul $(x=0)$. Formularea din enunţ „număr real strict pozitiv" nu este corectă. Corect este „număr real pozitiv".

c) Aşa ca mai sus notăm cu A matricea sistemului. Din a) avem că $\det A=-(m-1)^2\cdot\left(m^2+m+1\right)^2=-\left(m^3-1\right)^2$.

Dacă $\det A=0\Leftrightarrow m=1$, atunci $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, de unde obţinem că rangul lui A este egal cu 1.

Dacă $\det A\neq 0$, adică $m\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, atunci rangul matricei A este egal cu 3. Deci, rang $A\neq 2,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

2. a) Avem că $x*y=-\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(y-1)+1$, de unde rezultă că $(x*y)*z=\left(-\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(y-1)+1\right)*z=$ $=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(y-1)+1-1\right)\cdot(z-1)+1=\frac{1}{4}\cdot(x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1)+1$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$. Dar, $x*(y*z)=x*\left(-\frac{1}{2}\cdot(y-1)\cdot(z-1)+1\right)=-\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot(y-1)\cdot(z-1)+1-1\right)+1=\frac{1}{4}\cdot(x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1)+1$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$. Prin urmare, $(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$, adică legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

b) Legea de compoziţie admite element neutru dacă există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x\in\mathbb{R}$ să avem relaţiile $x*e=e*x=x$. Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=x\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(e-1)+1=x\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(e-1)+x-1=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e-\frac{1}{2}+1\right)=0\Leftrightarrow(x-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot e+\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot(x-1)\cdot(e+1)=0$. Cum ultima relaţie trebuie să aibă loc pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că $e+1=0\Leftrightarrow e=-1$. Pentru a termina demonstraţia trebuie să verificăm că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ are loc $(-1)*x=x$. Prin calcul, obţinem $(-1)*x=-\frac{1}{2}\cdot(-1-1)\cdot(x-1)+1=$ $=x-1+1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deci, legea de compoziţie „$*$” admite $e=-1$ ca element neutru.

c) La subpunctul a) am demonstrat că $x*(y*z)=(x*y)*z=\frac{1}{4}\cdot(x-1)\cdot(y-1)\cdot(z-1)+1$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$. Deci, $x*x*x=3\Leftrightarrow\frac{1}{4}\cdot(x-1)^3+1=3\Leftrightarrow(x-1)^3=8\Leftrightarrow\sqrt[3]{(x-1)^3}=\sqrt[3]{8}\Leftrightarrow x-1=2\Leftrightarrow x=3$.

Subiectul al III-lea

1. a) Avem că $f(-x)=(-x)^3-3\cdot(-x)+2=-x^3+3\cdot x+2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deci, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}=$

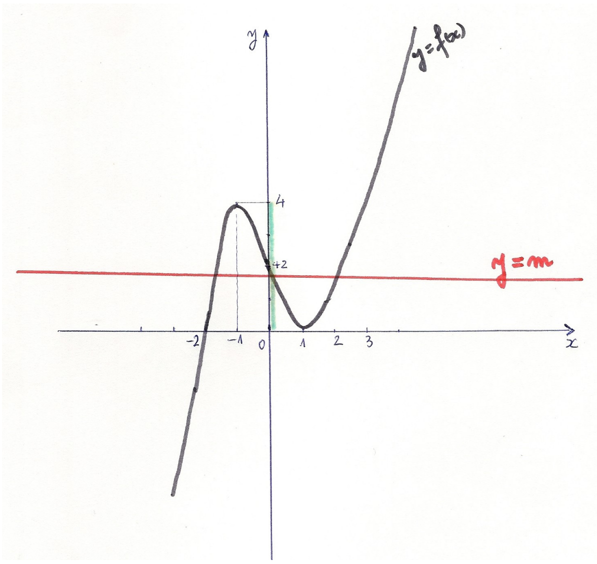
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3\cdot x+2}{-x^3+3\cdot x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(-1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{-1+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=-1.$$

b) Calculând derivata funcţiei f obţinem $f'(x)=3\cdot x^2-3=3\cdot\left(x^2-1\right)<0$, pentru orice $x\in(-1;1)$ şi $f'(-1)=f'(1)=0$. Deci, funcţia f este strict descrescătoare pe intervalul $[-1;1]$ (vezi tabelul de mai jos).

c) Acest subpunct se poate rezolva în două moduri: folosind metoda şirului lui Rolle sau metoda grafică. Pentru început utilizăm metoda grafică.

Avem că $f'(x)=3\cdot\left(x^2-1\right)$ şi $f''(x)=6\cdot x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$, $f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $f(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-2;+1\}$.

x	$-\infty$		-1		0		$+1$			$+\infty$
$f'(x)$	+++++++++++++		0	------------			0	++++++++++++++++++		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	-----------------				0	+++++++++++++++++++++++++++++				



Numărul de soluţii ale ecuaţiei $f(x)=m,\ m\in\mathbb{R}$ este egal cu numărul punctelor de intersecţie dintre curba $y=f(x)$ şi dreapta $y=m,\ m\in\mathbb{R}$. Observăm că dreapta $y=m$ intersectează graficul funcţiei f în trei puncte pentru $m\in(0;4)$.

Răspuns: $m\in(0;4)$.

Rezolvând acest subpunct prin metoda şirului lui Rolle, considerăm funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)-m=$ $=x^3-3\cdot x+2-m$. Avem că $g'(x)=3\cdot\left(x^2-1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x\in\{-1;1\}$, $g(-1)=4-m,\ g(1)=-m$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. Datele de mai sus se pot organiza sub forma unui tabel de tipul:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	Discuţie
$g'(x)$		0	0		
m \ $g(x)$	$-\infty$	$4-m$	$-m$	$+\infty$	
$m\in(-\infty;0)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1\in(-\infty;1)$
$m=0$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1\in(-\infty;1)$ şi $x_2=0$ este rădăcină multiplă (dublă)
$m\in(0;4)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty;1),\ x_2\in(-1;1),\ x_3\in(1;+\infty)$
$m=4$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1=-1$ este rădăcină multiplă (dublă) şi $x_2\in(1;+\infty)$
$m\in(4;+\infty)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1\in(1;+\infty)$

Din tabel deducem că pentru $m\in(0;4)$ ecuaţia $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=m$ are trei soluţii reale distincte.

Răspuns: $m\in(0;4)$.

2. a) Avem că $I_2=\int_0^1\left(1-x^2\right)^2 dx=\int_0^1\left(x^4-2\cdot x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^5}{5}-2\cdot\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_0^1=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1=\frac{8}{15}$.

b) Folosind criteriul lui Weierstrass, trebuie să demonstrăm că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este monoton şi mărginit. Dacă $x\in[0;1]$, atunci $0\leq1-x^2\leq1$, de unde rezultă că $0\leq\left(1-x^2\right)^n\leq1$, $\forall x\in[0;1]$ şi $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare, $0\cdot(1-0)\le\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx\le 1\cdot(1-0)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, adică $0\le I_n\le 1$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit. Pentru monotonia şirului calculăm $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=$

$=\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)^{n+1}-\left(1-x^2\right)^n\right]dx=\int_0^1\left[\left(1-x^2\right)^n\cdot\left(1-x^2-1\right)\right]dx=\int_0^1\left[\left(-x^2\right)\cdot\left(1-x^2\right)^n\right]dx\le 0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deoarece $\left(-x^2\right)\cdot\left(1-x^2\right)^n\le 0$, pentru orice $x\in[0;1]$ şi pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, de unde deducem că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este monoton descrescător. Am demonstrat că şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este mărginit şi monoton descrescător, deci, conform criteriului lui Weierstrass este convergent, ceea ce trebuia demonstrat.

c) Efectuam schimbarea de variabilă $x=\cos t$ şi obţinem că $I_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)^n\cdot(-\sin t)\,dt\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\cdot n+1}t\,dt$. Avem că $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)'\cdot\sin^{2\cdot n}t\,dt=-\cos t\cdot\sin^{2\cdot n}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos t)\cdot\left(\sin^{2\cdot n}t\right)'dt=$

$=2\cdot n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot\sin^{2\cdot n-1}t\,dx=2\cdot n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)\cdot\sin^{2\cdot n-1}t\,dx=2\cdot n\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{2\cdot n-1}t-\sin^{2\cdot n+1}t\right)dt$. Deci, $I_n=2\cdot n\cdot I_{n-1}-2\cdot n\cdot I_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, de unde deducem că $(2\cdot n+1)\cdot I_n=2\cdot n\cdot I_n$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce trebuia demonstrat.