Rezolvarea subiectului model pentru

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E. c)
Probă scrisă la MATEMATICĂ (M2)

prezentare de **ROMEO ZAMFIR**

Subiectul I

1. Avem că $a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ şi $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = \dfrac{(2\cdot a_1 + (n-1)\cdot r)\cdot n}{2}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Deci, $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \dfrac{(2\cdot a_1 + 4\cdot r)\cdot 5}{2} = \dfrac{(2\cdot 5 + 4\cdot 2)\cdot 5}{2} = 45$.

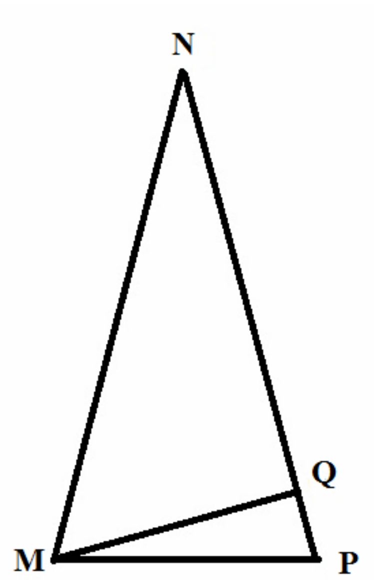
2. Ecuaţia $x^2 - (m+1)\cdot x + m = 0$ are soluţii egale $\Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4\cdot m = 0 \Leftrightarrow m^2 + 2\cdot m + 1 - 4\cdot m = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2\cdot m + 1 = 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

3. Notăm cu A punctul de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Ox şi cu B punctul de intersecţie a graficului funcţiei f cu axa Oy. Avem că $f(0) = 2^{0+1} - 1 = 1$ şi $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, de unde rezultă că $A(-1;0)$ şi $B(0; f(0)) = B(0;1)$.

4. Prin calcul direct obţinem $2\cdot C_4^2 - 3\cdot A_4^1 = 2\cdot \dfrac{4!}{2!\cdot(4-2)!} - 3\cdot \dfrac{4!}{(4-1)!} = 2\cdot 6 - 3\cdot 4 = 0$.

5. Dacă $a = 0$, atunci $\overrightarrow{v_1} = 2\cdot \vec{i}$ şi $\overrightarrow{v_2} = 3\cdot \vec{i} + 2\cdot \vec{j}$, care nu sunt coliniari deoarece $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{0}{2}$. Dacă $a \neq 0$, atunci vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{a+3}{2} = \dfrac{2}{a} \Leftrightarrow a\cdot(a+3) = 4 \Leftrightarrow a^2 + 3\cdot a - 4 = 0 \Leftrightarrow a \in \{-4;1\}$. În ipoteză avem că $a > 0$, deci răspunsul este $a = 1$.

6. Avem că $A_{\Delta MNP} = \dfrac{MN\cdot NP\cdot \sin N}{2} \Leftrightarrow 16 = \dfrac{8\cdot 8\cdot \sin N}{2} \Leftrightarrow \sin N = \dfrac{1}{2}$.



Altfel, în triunghiul ΔMNP ducem $MQ \perp NP, Q \in NP$. Deci, $A_{MNP} = \dfrac{MQ\cdot NP}{2} \Leftrightarrow 16 = \dfrac{MQ\cdot 8}{2} \Leftrightarrow MQ = 4$. Din ΔMNQ $(\sphericalangle Q \equiv 1 \text{ dr})$ avem că $\sin N = \sin(\sphericalangle MNQ) = \dfrac{MQ}{MN} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. a) Avem că $A_1(0;3)$ şi $A_2(1;4)$. Ecuaţia dreptei A_1A_2 este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot x - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot y +$ $+\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + y - 3 = 0 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$. Altfel, folosind formula $\dfrac{x - x_{A_1}}{x_{A_2} - x_{A_1}} = \dfrac{y - y_{A_1}}{y_{A_2} - y_{A_1}}$, obţinem că ecuaţia dreptei A_1A_2 este $\dfrac{x-0}{1-0} = \dfrac{y-3}{4-3} \Leftrightarrow x = y - 3 \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$.

b) Condiţia de coliniaritate pentru punctele $A_m(m-1; m+3)$, $A_n(n-1; n+3)$ şi $A_p(p-1; p+3)$ este $\begin{vmatrix} x_{A_m} & y_{A_m} & 1 \\ x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{A_p} & y_{A_p} & 1 \end{vmatrix} = 0$. Obţinem, $\begin{vmatrix} x_{A_m} & y_{A_m} & 1 \\ x_{A_n} & y_{A_n} & 1 \\ x_{A_p} & y_{A_p} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & m+3 & 1 \\ n-1 & n+3 & 1 \\ p-1 & p+3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} m-1 & m+3 & 1 \\ n-m & n-m & 0 \\ p-m & p-m & 0 \end{vmatrix} = 0$, deoarece elementele de pe a doua linie şi de pe a treia linie sunt proporţionale.

c) Trebuie să determinăm mulţimea $M_{2011} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \middle| A_nA_{2011} \le 2 \right\}$. Deci, $A_n(n-1; n+2)$, $A_{2011}(2010; 2013)$ şi $d(A_n; A_{2011}) = A_nA_{2011} = \sqrt{(n-1-2010)^2 + (n+2-2013)^2} = \sqrt{2 \cdot (n-2011)^2} = \sqrt{2} \cdot |n-2011|$. Avem de rezolvat inecuaţia $A_nA_{2011} \le 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot |n-2011| \le 2 \Leftrightarrow |n-2011| \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \le n - 2011 \le \sqrt{2} \Leftrightarrow 2011 - \sqrt{2} \le$ $\le n \le 2011 + \sqrt{2}$. Cum $2011 - \sqrt{2} = 2011 - 1{,}4142.... = 2009{,}5857....$ şi $2011 + \sqrt{2} = 2011 + 1{,}4142... = 2012{,}4142...$, deducem că $M_{2011} = \{2010;\ 2011;\ 2012\}$.

2. a) Pentru $m = 4$ obţinem $f = X^3 + X^2 - 17 \cdot X + 15$. Aplicăm schema lui Horner.

	X^3	X^2	X	X^0
3	1	1	−17	15
	1	4	−5	0

Câtul împărţirii este $q = X^2 + 4 \cdot X - 5$ şi restul este egal cu $r = 0$.

b) Conform teoremei restului rezultă că $X - 1$ divide polinomul f dacă şi numai dacă $f(1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1^3 + (m-3) \cdot 1^2 - 17 \cdot 1 + (2 \cdot m + 7) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

c) Notăm $y = 3^x > 0$. Obţinem că $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0 \Leftrightarrow y^3 + y^2 - 17 \cdot y + 15 = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0$. Din subpunctul a) avem că $f = X^3 + X^2 - 17 \cdot X + 15 = (X-3) \cdot \left(X^2 + 4 \cdot X - 5\right) = (X-3) \cdot (X-1) \cdot (X+5)$. Deci, $f(y) = 0 \Leftrightarrow (y-3) \cdot (y-1) \cdot (y+5) = 0 \Leftrightarrow y \in \{3; 1; -5\}$. Dar, $y > 0$, deci $y = 1$ sau $y = 3$, de unde rezultă că $3^x = 1$ sau $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 1$. Prin urmare, mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $S = \{0; 1\}$.

Subiectul al III-lea

1. a) Avem că $f(0)=-4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{-4}{x^2+1}=\frac{-4}{0^2+1}=-4$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-4)=0-4=-4$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=f(0)=-4$, de unde rezultă că funcţia f este continuă în $x_0=0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observaţie. Funcţiile $x\to\frac{-4}{x^2+1}$ şi $x\to x-4$ sunt continue pe $\mathbb{R}$ deoarece sunt funcţii elementare (prima este funcţie raţională, iar a doua este funcţie de gradul I). Rezultă că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}^*$. Mai sus am demonstrat că funcţia f este continuă în $x=0$ şi, prin urmare, funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

b) Deoarece limita se calculează pentru $x\to 4$ rezultă că putem considera $f(x)=x-4$, deoarece orice vecinătate a lui 4 conţine un interval centrat în 4 inclus în $\mathbb{R}_+^*$, adică un interval de tipul $(4-\varepsilon;4+\varepsilon)\subset$ $\subset(0;+\infty)$ cu $\varepsilon\in(0;4)$. Deci, $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)}{16-x^2}=\lim\limits_{x\to 4}\left(-\frac{x-4}{x^2-16}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\left(-\frac{x-4}{(x-4)\cdot(x+4)}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\left(-\frac{1}{x+4}\right)=-\frac{1}{8}$.

c) Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(a;f(a))$ este: $y-f(a)=f'(x)\cdot(x-a)$. În cazul nostru $A(-1;-2)$, de unde rezultă $a=-1$, $f(-1)=-2$, $f'(x)=\frac{8\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}$, pentru orice $x<0$, deci $f'(-1)=-2$. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(-1;-2)$ este $y-(-2)=(-2)\cdot(x+1)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y+2\cdot x+4=0$.

2. a) Avem că $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_0(x)=3\cdot 0^2\cdot x^2+6\cdot 0\cdot x+9=9$. Deci, $F_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=9\cdot x$ este o primitivă a funcţiei f_0. Prin urmare, mulţimea primitivelor funcţiei f_0 este formată din funcţiile $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=9\cdot x+c$, unde c parcurge mulţimea numerelor reale, adică mulţimea primitivelor funcţiei f_0 este $\int 9\cdot x\,dx=\left\{F \mid F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=9\cdot x+c,\ c\in\mathbb{R}\right\}$.

b) Avem că $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=3\cdot 1^2\cdot x^2+6\cdot 1\cdot x+9$, adică $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=3\cdot x^2+6\cdot x+9$. Observăm că $\Delta=6^2-4\cdot 3\cdot 9=36-96=-60<0$, deci $f_1(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Prin urmare, aria suprafeţei cuprinse între graficul funcţiei f_1, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ este egală cu

$$\int_0^1\left|f_1(x)\right|dx=\int_0^1\left|3\cdot x^2+6\cdot x+9\right|dx=\int_0^1\left(3\cdot x^2+6\cdot x+9\right)dx=\left.\left(x^3+3\cdot x^2+9\cdot x\right)\right|_0^1=13$$

c) Avem că $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=3\cdot 2^2\cdot x^2+6\cdot 2\cdot x+9$, adică $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=12\cdot x^2+12\cdot x+9$.

Prin urmare, $\int_1^2\frac{f_2(x)-9}{x}\cdot e^x\,dx=\int_1^2\frac{12\cdot x^2+12\cdot x+9-9}{x}\cdot e^x\,dx=\int_1^2(12\cdot x+12)\cdot e^x\,dx=\int_1^2(12\cdot x+12)\cdot\left(e^x\right)'\,dx=$

$$=\left.(12\cdot x+12)\cdot e^x\right|_1^2-\int_1^2(12\cdot x+12)'\cdot e^x=(12\cdot 2+12)\cdot e^2-(12\cdot 1+12)\cdot e-\int_1^2 12\cdot e^x\,dx=36\cdot e^2-24\cdot e-\left.12\cdot e^x\right|_1^2=$$

$$=36\cdot e^2-24\cdot e-\left.12\cdot e^x\right|_1^2=36\cdot e^2-24\cdot e-\left(12\cdot e^2-12\cdot e\right)=24\cdot e^2-12\cdot e.$$